

ELEMENTAR GEOMETRIYADA EKSTREMALLIQ MÁSELELER

S.A.Tanirbergenov – fizika-matematika ilimleriniń kandidati, docent

N.B.Jalgasova – magistrant

Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutı

A.B.Narekşeva – talaba

Mirzo Ulughbek atındaǵı Ózbekstan milliy universiteti

Tayanch soʻzlar: ekstremal, maksimum, minimum, kesma, simmetriya, perimetr, toʻgʻri toʻrtburchak, silindr, radius.

Ключевые слова: экстремал, максимум, минимум, отрезок, симметрия, периметр, прямоугольник, цилиндр, радиус.

Key words: extremal, maximum, minimum, line segment, symmetry, perimeter, rectangle, cylinder, radius.

Maksimum hám minimumǵa arnalǵan matematikalıq máseleler ekstremallıq dep ataladı. Ekstremallıq máselelerdiń anaw yamasa mınaw forması matematiklerdi burınan qızıqtıra basladı. Maksimum hám minimum (ekstremallıq) máseleler matematika tariyxında belgili orınlardı iyelep, onıń rawajlanıwına úlken járdem berdi. Másele, ótken dáwirde jasaǵan Evklid, Arximed, Apolloniy, Geron, Tartal'ya, Iogann Kepler, Yakob Bernulli, Nyuton hám basqada kóp alımlar ekstremallıq máselelerdi sheshiwde ózleriniń úlken úleslerin qostı. Usı rawajlanıw dáwirinde geometriya, algebra, fizika hám t.b. pánlerde qızıqlı ekstremallıq máseleler jıynaǵı payda boldı. Sonıń nátiyjesinde taza teoriyalar kelip shıǵıp, bul boyınsha matematikada qandayda bir pütün baǵdar payda boldı. Sebebi, ekstremallıq máseleler ekonomikalıq, injenerlik, qurılısh hám taǵı basqada esaplawlarda kóp ushırasadı.

Adamlar ózleriniń kúshlerin eń jaqsı nerselerdi islewge jumsw menen bir qatarda olar boyınsha talap etilgen máselelerdi qolaylastırılǵan usılda sheshiwge háreket etedi. Sonıń menen birge az shıǵın jumsw miynet ónimdarlıǵın arttırıwǵa hám sonıń nátiyjesinde kóp payda alıwǵa qaratılǵan jumslarda da maksimum-minimum máseleleri qollanıladı. Basqasha aytqanda ámeliyatta kóp qollanıladı. Sonıń ushın da oqıwshılardı ekstremallıq máselelerdi úyretiw áhmiyetli bolıp esaplanıladı. Bunday máseleler oqıwshılardıń jámiyettegi óz ornın tabıshı iyelewinde jekke pikirleriniń rawajlanıwına hám matematika sheńberindegi kásip-ónerlilikke iyelewine járdem beredi. Basqasha aytqanda jámiyetimiz tárepinen oqıwshılardı qoyılǵan máselelerdi olar eń qolaylı usılda sheshiw kónlikpelerin ózinde payda etip baradı.

Ekstremallıq máselelerdi mına bólimlerge bólip úyrense boladı:

1⁰. Shamalardıń eń úlken hám eń kishi mánislerin tabıw arqalı tariyxıy geometriyalıq máselelerdi sheshiw.

2⁰. Geometriyalıq máselelerdegi shamalardıń eń úlken hám eń kishi mánislerin algebradaǵı bir qansha teoremlardan paydalanıp anıqlaw.

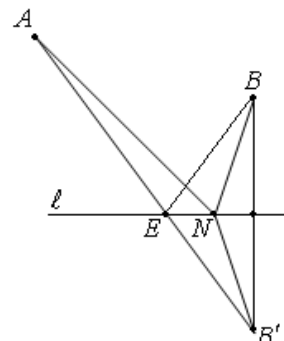
3⁰. Geometriyalıq máselelerdegi shamalardıń eń úlken hám eń kishi mánislerin anıqlaw máselelerinde elementar geometriyadaǵı maǵlıwmatlardan paydalanıw.

4⁰. Geometriya boyınsha ekstremallıq máselelerdi matematikalıq analiz usılların qollanıw sheshiw.

Bul jerde birqansha ekstremallıq máselelerdi sheshiw usılın kórip ótemiz.

1-másele. Kanaldıń bir tárepinde awıl hám onnan bir qansha uzaqta órt óshiriw bólimi jaylasqan. Órt óshiriwshilerdiń kanaldan suw alıp, onı awılǵa jetkerip beriwı kerek bolatuǵın eń qısqa joldı anıqlań.

Sheshimi. Bul ekstremallıq másele bolıp esaplanıladı. Bunı geometriya tiline ótkeriw ushın kanaldı tuwrı sıziq formasında dep alıp onı ℓ háribi menen, al awıldı A hám órt óshiriw bólimin B dep belgileymiz. Órt óshiriwshiler kanaldıń N noqtatın suwalıp A noqtatqa barıwı kerek. Biraq, N noqtat ℓ tuwrınıń qálegen noqtatı.



1-sızılma

Biz, ℓ tuwrıǵa qarata B noqtatqa simmetriyalı bolǵan B' noqtatı anıqlap, [AB'] kesindiniń ℓ tuwrı menen kesilisiw noqtatın E dep belgileymiz. Sonda BE+EA aralıq órt óshiriwshiler ushın eń qısqa jol boladı (1-sızılma).

Sebebi,

$$BN = NB', BE = B'E, BN + NA = B'N + NA > B'E + EA = BE + EA$$

Bulardan, $BN + NA > BE + EA$. Demek, órt óshiriwshiler eń qısqa jol menen awılǵa ózleri menen birge suw alıp barıwı ushın kanaldıń E noqtatın tańlawı kerek eken.

2-másele. Perimetri $2p$ ǵa teń bolǵan tuwrımúyeshliklerden maydanı eń úlken bolatuǵının tabıń.

Sheshimi. Perimetri $2p$ ǵa teń bolǵan tuwrımúyeshlikler sheksiz kóp, yaǵnıy olar sheksiz kóplikti payda etedi. Biziń wazıypamız bul tuwrımúyeshliklerdiń sheksiz kópliginen maydanı eń úlken bolǵanın ajratıp alıw bolıp esaplanıladı. Eger bunday tuwrımúyeshliktiń bir tárepi X qa teń bolsa, ekinshi tárepi $p - X$ qa teń boladı. Tuwrımúyeshliktiń S maydanı $x(p - x)$ qa teń. $S = x(p - x)$, $x \in (0; p)$ funkciyanıń kritikalıq noqtatın tabamız.

$$S' = p - 2x \Rightarrow p - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{p}{2}$$

Demek, $\frac{p}{2} \in (0; p)$. Bul jerde $(0; \frac{p}{2})$ aralıqta S funkciyası ósedi, $(\frac{p}{2}; p)$ aralıqta bolsa kemeyedi. $x = \frac{p}{2}$

bolǵanda S maydan eń úlken boladı.

Solay etip, $2p$ perimetrli tuwrımúyeshliklerden maydanıń eń úlkeni- tárepi $\frac{p}{2}$ bolatuǵın kvadrat boladı eken.

3-másele. Toǵaydıń ishindegi baza joldan 5km uzaqlıqta jaylasqan. Usı jolda temir jol stanciyası bar bolıp, ol bazadan 13km uzaqlıqta turadı. Piyada jolda 5km/saat, al toǵayda 3 km/saat tezlik penen júredi. Piyadanıń bazadan temir jol stanciyasına deyingi júretuǵın eń qısqa waqtın tabıń.

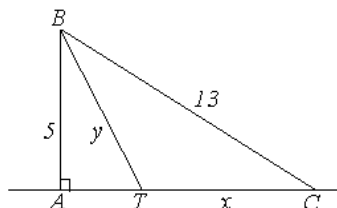
Sheshimi. Piyadanın toǵay arqalı júretuǵın jolınıń uzınlıǵı y km, al temir jol arqalı júretuǵın jolı x km bolsın (2-sızılma).

Sızılmadan $AC = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$. Bul jaǵdayda tuwrı múyeshli ABT úshmúyeshlikten $y = \sqrt{25 + (12 - x)^2}$ boladı. Piyadanın bazadan temir jol stanciyáǵa deyingi aralıqqa ketken waqıtlarınıń jıynaǵı

$$t = \frac{y}{3} + \frac{x}{5}$$

bolǵanlıqtan, onıń x ózgeriwshige qarata funkciyası tómendegi túrde boladı.

$$t(x) = \frac{\sqrt{25 + (12 - x)^2}}{3} + \frac{x}{5}.$$



2-sızılma.

Usı funkciyanıń minimum mánisin tabamız:

$$t'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{-2(12 - x)}{2\sqrt{25 + (12 - x)^2}} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{12 - x}{3\sqrt{25 + (12 - x)^2}}.$$

Bunnan,

$$t'(x) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{12 - x}{3\sqrt{25 + (12 - x)^2}} \leq 0,$$

$$5(12 - x) \geq 3\sqrt{25 + (12 - x)^2}.$$

Bul jerde $12 - x > 0$ bolǵanlıqtan, teńsizliktiń eki jaǵında kvadratqa kótergenimizde onıń mánisi ózgermeydi. Sonıń ushın,

$$25(12 - x)^2 \geq 9 \cdot 25 + 9 \cdot (12 - x)^2 \Rightarrow 16 \cdot (12 - x)^2 \geq (3 \cdot 5)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4|12 - x| \geq 15 \Rightarrow 12 - x \geq \frac{15}{4} \Rightarrow x \leq \frac{33}{4}.$$

Usıǵan uqsas, $t'(x) \geq 0$ teńsizlikten $x \geq \frac{33}{4}$ shártke iye bolınadı. Demek, $t = t(x)$ funkciya $x = \frac{33}{4}$ noqatta eń kishi mániske iye boladı eken.

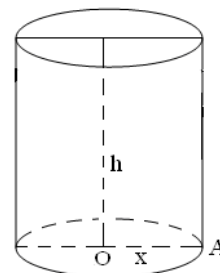
$$\text{Solay etip, } y = \sqrt{25 + \frac{15^2}{16}} = 5\sqrt{1 + \frac{9}{16}} = 5\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{25}{4},$$

$$t = \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{33}{4} = \frac{125 + 99}{60} = \frac{224}{60} = \frac{56}{15} = 3 + \frac{11}{15}.$$

Demek, piyadanıń júretuǵın eń qısqa waqıtı 3 saat 44minut eken.

3-másele. Qañıltr listten V kólemli cilindır formasındaǵı shelek jasaw talap etiledi. Shelek jasawǵa eń kem material ketiwi ushın cilindrdıń biyikligi hám ultanınıń radiusı qanday bolıwı kerek?

Sheshimi. Cilindr formasındaǵı shelek ultanınıń radiusın x dep belgileybiz (3-sızılma). Sonda, shelektiń kólemi $V = \pi x^2 h$ bolǵanlıqtan $h = \frac{V}{\pi x^2}$ ekenligi bizge belgili.



3-sızılma.

Qaqpaqsız shelektiń tolıq betiniń maydanın tabamız:

$$S = \pi x^2 + 2\pi x h.$$

Usı teńlikten ekstremumdı tekseriwge bolatuǵın funkciyanı payda etemiz:

$$S(x) = \pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2} \Rightarrow S(x) = \pi x^2 + \frac{2V}{x}.$$

Usı funkciya eń kishi mániske iye bolatuǵın shártı anıqlaymız. Bunıń ushın onıń kritikalıq noqatların tabıwda qollanılatuǵın tuwındını anıqlaymız.

$$S'(x) = 2\pi x - \frac{2V}{x^2}.$$

Tuwındını nolge teńlewden kelip shıqqan teńlemenıń sheshimleri anıqlanadı:

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 2\pi x - \frac{2V}{x^2} = 0 \Rightarrow \pi x^3 - V = 0.$$

Payda bolǵan úshinshi dárejeli teńleme tek bir $x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ degen sheshimge iye boladı. Endi funkciyanıń eń kishi yamasa eń úlken mánisin anıqlaw ushın $S(x)$ funkciyanıń ekinshi tártipli tuwındısını tabamız:

$$S''(x) = 2\pi + \frac{4V}{x^3}.$$

Bul tuwındınıń $x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ bolǵandaǵı mánisi anıqlanadı:

$$S''(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}) = 2\pi + 4V \cdot \frac{\pi}{V} = 2\pi + 4\pi = 6\pi > 0.$$

Demek, $S(x)$ funkciya $x = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ bolǵanda eń kishi mániske iye boladı eken. Sonıń menen birge

$$h = \frac{V}{\pi x^2} = \frac{V}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{V^3}{\pi^3} \cdot \frac{\pi^2}{V^2}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Solay etip, berilgen shártke boysınatuǵın shelek jasaw ushın eń kem qañıltr listtiń ólshemleri

$$x = h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

bolıwı, yaǵnıy list kvadrat formada bolıwı kerek eken.

Ádebiyatlar

1. Mirzaahmedov M.A., Ismaylov Sh.N., Amanov A.Q. Matematika. Algebra va analiz asoslari. 1-qism, 11-sinf. «ZAMIN NASHR» MCHJ. –Toshkent: 2018.
2. Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала математического анализа, учебник для 10-11 классов. Учебник для базового и профильного образования. - М.: «Просвещение», 2016.
3. Шклярский Д.О. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. -М.: «Наука», 1970.

РЕЗЮМЕ

Maqolada maksimum va minimum qo'llaniladigan geometrik masalalarni o'quvchilarga o'rgatish usuli ko'rib o'tiladi. Bu yerda amaliyotga bog'liq masalalar olinib, uning yechimlari berilgan.

РЕЗЮМЕ

В статье рассматриваются геометрические задачи, применяемые максимум и минимум, и их методика обучения учеников. Предлагается набор практических задач и их решения.

SUMMARY

This article are considered geometrical problems applying the maximum and minimum and their method of teaching for students. There is a set of practical problems and their solutions.

FIZIKANI O'QITISHDA FIZIKANING TABIIY FANLAR BILAN FANLARARO INTEGRATSIYASINI AMALGA OSHIRISH METODIKASI

F.Q.Tuglov – *pedagogika fanlari bo'yicha falsafa doktori*

Jizzax davlat pedagogika instituti

Tayanch so'zlar: fanlararo aloqalar, integratsiya, fanlararo integratsiya.

Ключевые слова: междисциплинарные связи, интеграция, междисциплинарная интеграция.

Key words: interdisciplinary connections, integration, interdisciplinary integration.

Respublikamizda amalga oshirilayotgan ijtimoiy-iqtisodiy sohalaridagi islohotlar, bitiruvchilarning kasbiy muammolarni hal qilishga tayyorligiga qo'yiladigan talablarni o'zgartirish, bozor munosabatlari sharoitida yangi muhitga moslashish muammolari, mavjud ko'nikmalar va ijtimoiy ahamiyatga ega fazilatlar, nostandart vaziyatlarda qaror qabul qilish qobiliyati va boshqa xususiyatlarning shakllanishiga olib keladi.

Bunday sharoitda integratsiya talabalarning olamga yaxlit nuqtai nazarini shakllantirish, hodisa va jarayonlarning chuqur aloqalarini tushunish, talabalarni kundalik hayotning murakkab muammolarini hal qilishga tayyorlashning muhim vositasidir. Shuning uchun, fizika va astronomiya bakalavriat ta'lim yo'nalishi talabalarini maqsadli tayyorlash tizimini yaratishda fizika o'qitishda fanlararo integratsiyani amalga oshirish uchun ehtiyoj bor.

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan tasdiqlangan 60110700-Fizika va astronomiya bakalavriat ta'lim yo'nalishi uchun ishlab chiqilgan malaka talablarida bakalavrlar kasbiy faoliyatlarining turlari, kasbiy vazifalari, kasbiy kompetensiyalariga qo'yiladigan talablar pedagog kadrlarni tayyorlash jarayonini takomillashtirishga qaratilgan [1].

Hozirgi kunda ta'lim jarayonida fanlararo aloqalarni an'anaviy shaklda amalga oshirish yetarli darajada emas, fanlararo integratsiya nafaqat axborot jihatida, balki faoliyatda ham amalga oshirilishi kerak.

Ushbu maqola fizikaning boshqa tabiatshunoslik fanlari bilan fanlararo integratsiyasini amalga oshirish yo'llari, shakllari va xususiyatlarini ochib berishga qaratilgan.

Fanlararo aloqalar fanlararo aloqalarning o'quv jarayonidagi aksi sifatida qaralishi kerak, ular quyidagicha ifodalanadi:

- bir obyektning turli fanlar tomonidan har tomonlama o'rganish;
- bir fanning metodlarini boshqa fanlar obyektlarini o'rganishda qo'llash;
- turli ilmiy sohalarida bir xil tushunchalar, qonunlar, nazariyalardan foydalanish;
- yangi ilmiy nazariyalar, ma'lumotlar, asbob-uskunalar, texnologiyalarni integratsiyalashgan asosda ishlab chiqish.

Fanlararo aloqalarni amalga oshirishning qayd etilgan yo'llariga muvofiq o'quv amaliyotida fanlararo aloqalar ham o'rnatiladi.

O'quv fanlari o'rtasidagi bog'lanish zarurati ta'limning didaktik tamoyillari, tarbiyaviy vazifalari, ta'limning hayot bilan bog'liqligi, talabalarni amaliy faoliyatga tayyorlash bilan bog'liq [2].

Ta'lim jarayonida fanlararo aloqalarni amalga oshirishning ko'plab usullari mavjud:

- turli xil o'quv fanlaridan aniq ma'lumotlarni qisman ko'rib chiqish;
- fanlararo xususiyatdagi ta'lim muammolari va muam-moli vaziyatlarni belgilash, fanlararo loyihalarni amalga oshirish;

- bilimlarni bir fandan boshqasiga o'tkazishni ta'min-laydigan umumiy ta'lim va umumlashtirilgan ko'nikmalarni shakllantirish;

- fanlararo mazmundagi masalalarni yechish;
- yaxlit va kompleks darslarni o'tkazish;
- integratsiyalashgan kurslarni (ixtiyoriy, tanlov, fakul-tativ va boshqalar) joriy etish.

Bugungi zamonaviy chuqur integratsiyalashgan davrda fanlararo integratsiya zamonaviy umumta'lim maktablarida o'quvchilarni hayotga tayyorlashga qaratilgan. Buni quyidagi usullarda amalga oshirish mumkin:

- alohida fanlarni o'rganish jarayonida - tushunchalar o'zaro bog'liqligi orqali yoki bir fan bo'yicha bilimga tayan-gan holda, fanlararo masalalarni yechishda yoki fanlararo laboratoriya ishlarini bajarishda;
- integratsiyalashgan fanlarni o'rganish jarayonida ("Atrof-dagi dunyo", "Tabiatshunoslik", integratsiyalangan tanlov fanlar, tanlov fanlari).

Fizika fanining boshqa fanlar bilan integratsiyalashuvin-ing o'ziga xosligini o'quv fanining mazmunini, integratsi-yani amalga oshirishda metodistlar tomonidan tavsiya etil-gan shakllar, metodlar va o'quv qo'llanmalarini tahlil qilish orqali aniqlash mumkin. Fizika fani mazmuni bilan boshqa tabiiy fanlar mazmuni o'rtasidagi bog'liqliklarni tahlil qilish quyidagilarni belgilaydi. Fizika fani boshqa tabiiy fan-lar bilan ham, ijtimoiy, gumanitar, matematika va texnologiya bilan ham deyarli barcha aloqa turlariga ega.

Fizika va kimyo o'qitish o'rtasidagi bog'liqlik (kimyo bo'limi - fizik kimyo - mohiyatiga ko'ra, asosan, fizik bilimlar), asosan konseptual - atom va uning tuzilishi, ko'plab umumiy miqdorlar - moddaning miqdori, molyar massasi va boshqalar kimyoda fizikaga qaraganda ertaroq o'rganiladi, moddaning elektron tuzilishi, elektr zaryadla-rining o'zaro ta'siri, elektroliz - fizikani o'rganish jarayon-ida qaraladi. Fizika va kimyo kurslari bir-biri bilan cham-barchas bog'liq - bir fan bo'yicha o'rganila boshlagan narsa boshqasida davom etadi, keyin esa birinchisida yana chuqurlashadi (atomning tuzilishi, davriy sistemasi).

Biologiya (botanika va zoologiya) fanlarini o'rganishda talabalar harorat, yorug'lik, namlik va boshqalar, gazlar, suyuqliklar va qattiq jismlar xossalari namoyon bo'lishini, kapillyar hodisalarni, diffuziyani ko'rib chiqish orqali, tarozi, lupa, mikroskop va boshqa asboblardan foy-dalanishning dastlabki ko'nikmalarini egallaydilar. Fizik bilimlar talabalarga elektr zaryadlari va elektr maydonining hujayralar hayotidagi rolini yaxshiroq tushunishga imkon beradi. Fanlararo aloqalar - biologiyada fizika bilimlaridan foydalanish qoida tariqasida, faktlar darajasida o'rnatiladi.

Geografiyani o'rganish boshqa tabiiy fanlarga ham murojaat qilishni talab qiladi - suv obyektlarining (sun'iy va tabiiy) iqlim va mikroiklimga ta'siri, ob-havo hodisalari asosan fizik bilimlar bo'lib, issiqlik sig'imi, atmosfera bosimi, bug'lanish, kondensatsiya, konvektsiya tushunchala-ri va boshqalar bilan bog'liq.