

ӘДЕТТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛЫҚ ТЕҢЛЕМЕЛЕР УШЫН ҚОЙЫЛҒАН КОШИ МӘСЕЛЕСІН САҢЛЫ ШЕШИҰ УСЫЛЛАРЫНЫҢ ЭФФЕКТИВЛИГИ БОЙЫНША САЛЫСТЫРМАЛЫ АНАЛИЗИ

Д.П.Бектурсынова – стажёр оқытыушы

Әжсинияз атындағы Нөкис мәмлекетлик педагогикалық институты

Таянч сўзлар: оддий дифференциал тенглама, бошлангич шарт, сонли усул, такрибий ечим, аниклилик, самарадорлик.

Ключевые слова: простое дифференциальное уравнение, начальное условие, численный метод, приближительное решение, точность, эффективность.

Key words: ordinary differential equation, initial condition, numerical method, approximate solution, accuracy, efficiency.

Көплеген физикалық кубылыстар дифференциаллық теңлемелер арқалы аңлатылатуғын болғанлықтан, инженерлик хэм илимий мәселелер көпшилик жағдайларда дифференциаллық теңлемелерди шешиў менен байланыслы болады. Лекин, бирқанша әмелий әхмийетли мәселелерде бул дифференциаллық теңлемелер курамалы көриниске ийе, хэм олардың дәл шешимин табыў кыйын яки мүмкин болмайды. Деген менен, бул сыяқлы курамалы мәселелерди санлы усулларға тийкарланып, ЭЕМ жәрдемінде жуўық түрде шешиў мүмкин. Дифференциаллық теңлемелерди өз ишине алыўшы мәселелердин бири басланғыш мәселе яғный Коши мәселеси болып табылады.

Биринши тәртипли, әдеттеги, дифференциаллық теңлеме ушын қойылған Коши мәселесин санлы шешиў мәселесин қараймыз.

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (1)$$

Бул мәселени санлы усул менен шешиў ушын шешим изленип атырған $[x_0, b]$ кесиндисинде $x_1, x_2, \dots, x_n$ интеграллаў түйинлеринин торы киритиледи. Тең өлшемли тор ушын тор түйинлери $x_i = x_0 + i \cdot h, i = 0, 1, \dots, n$ формуласы арқалы анықланады, бунда $h = x_{i+1} - x_i$ - тордың адымы [1]. Интеграллаў торының түйинлеринде $y(x)$ дәл шешимнің $y_1, y_2, \dots, y_n$ жуўық мәнислери табылады. Санлы шешиўдин нәтижесинде изленип атырған $y(x)$ шешимнің тор түйинлериндеги жуўық мәнислеринин $\{x_i, y_i\}, i = 0, 1, \dots, n$ кестеси (тор функциясы)не ийе боламыз.

Эйлер усылы биринши тәртипли әпиўайы дифференциаллық теңлемелерге қойылған Коши мәселесин шешиўдин ең әпиўайы санлы усылы болып есапланады.

Бул усул менен Коши мәселесин шешиўдин мәниси төмендегисе [3]: дәслеп, (1) теңлемедә $x = x_i, i = \overline{0, n}$ деп уйғарылып, төмендеги

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)), \quad i = \overline{0, n} \quad (2)$$

теңлеме менен алмастырылады. Қолайлық ушын $y(x_i) = y_i$ белгилеў киритемиз. Бул жерде, $y(x_i), i = \overline{0, n}$ (1), (2) Коши мәселесинин $x = x_i, i = \overline{0, n}$ ноқаттағы мәниси. Бул жерде, x_i ноқаттағы $y(x_i) \approx y_i, i = \overline{0, n}$ белгили деп есаплап, x_{i+1} ноқаттағы $y(x_{i+1}) = y_{i+1}$ жуўық мәниси анықланыўы керек. Буның ушын $y(x)$ функциясы $x \in [a, b]$ кесиндиде жеткиликли тәртипке шекем үзликсиз туўындыға ийе деп есапланып, $y(x_{i+1}) = y(x_i + h)$ функциясын Тейлор қатарына жиклеймиз. Сонда,

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(\bar{x}_i), \quad (3)$$

бул жерде, $\bar{x}_i \in [x_i, x_{i+1}]$ ықтыярай ноқат, $h > 0$ киши муғдары. $y''(x) - x \in [x_i, x_{i+1}]$ кесиндиде әсте өзгертугын функция деп уйғарып хэм $y(x_i) \approx y_i, y(x_{i+1}) \approx y_{i+1}$ белгилеўлерди есапка алып, (3) формуладан төмендеги нәтижеге ийе боламыз:

$$y_{i+1} = y_i + hy'(x_i) = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (4)$$

(1), (2) Коши мәселесинин $x \in [a, b]$ кесиндидеги $y(x)$ шешиминин $x_i \in [a, b]$ ноқаттағы жуўық шешимин (4) формула менен есаплаў Эйлер усылы деп аталады. Эйлер усылы төмендеги кемшиликлерге ийе:

- 1) бул усулдың анықлығы кем
- 2) бул усулдың хәр бир адымында пайда болған есаплаў қәтеликлери жыйналып барылады. Соның ушын бул усулдан пайдаланып, (1)-(2) Коши мәселесин жеткиликли анықлық пенен есаплаў мүмкин болмайды.

Эйлер усылының жоқарыда келтирилген кемшиликлерин жоқ қылыў мақсетинде бул усулдың бирнеше өзгертилген түрлери жаратылған. Олардың гейпараларын көрип шығамыз:

1. Эйлердин жетилистирилген усылы. Бул усулдың есаплаў алгоритми мынадан ибарат: дәслеп $x_{i+1/2} = x_i + h$ ноқатлары жасалып,

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i) \quad \text{мәнислери есапланады, соң}$$

$$f_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right) \quad \text{мәнислери}$$

табылады. Ең акырында, x_{i+1} түйининдеги $y(x_{i+1}) \approx y_{i+1}$ жуўық мәниси төмендеги формула бойынша есапланады [4]:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h \cdot f_{i+1/2} = y_i + h \cdot f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) = \\ &= y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

2. Эйлер-Коши усылы да Эйлердин, әдеттеги, усылының жетилистирилген усылы болады. Бул усулдың есаплаў алгоритми төмендеги тәртипте жасалады:

$$\begin{aligned} \text{дәслеп } \overline{y_{i+1}} &= y_i + hf(x_i, y_i) \quad \text{мәнислери есапланып,} \\ (\overline{x_{i+1}}, \overline{y_{i+1}}) &\text{ ноқатта } f(x, y) \text{ мәниси табылады, яғный} \\ \overline{f_{i+1}} &= f(\overline{x_{i+1}}, \overline{y_{i+1}}) = f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)). \end{aligned}$$

Буннан соң, x_{i+1} түйининдеги $y(x_{i+1}) \approx y_{i+1}$ жуўық мәниси

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h \cdot \overline{f_{i+1/2}} = \\ &= y_i + \frac{h}{2} \cdot [f(x_i, y_i) + \overline{f_{i+1}}], \quad i = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

формуласы бойынша есапланады [5].

(1)-(2) Коши мәселесин шешиў ушын кең тарқалған усыллардың бири Рунге-Кутта усылы болып есапланады. Бул усылдың тийкарғы есаплаў схемасы төмендегише:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} \cdot [k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}], \quad (7)$$

бул жерде,

$$\begin{cases} k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i); & k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right); \\ k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right); & k_4^{(i)} = hf\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right) \\ (i = 0, 1, 2, \dots, n-1) \end{cases}$$

Рунге-Кутта усылының бир кемшилиги, (7) ден көринип турғанындай, усылдың хәр бир адымында $f(x_i, y_i)$ мәнислерин хәр қыйлы төрт ноқатта есаплаў талап етиледі. Егер бул функция жеткиликли курамалы функция болса, бундай есаплаўлар көп ўақытты хәм үлкен көлемдеги есаплаўларды анықлаўға туўры келеди. Екинши тәрептен, бул усылдың төртинши тәртипли анықлық дәрежесине ийе болыўы $f(x, y)$ функциясынан хәм тордың h адымын сайлап алыўдан ғәрезли болады. Бул усылды қолланғанда тордың адамын өзгертип барыў имканияты бар, бирақ бул көп мийнет талап етеди.

Мерсон 1958-жылда Рунге-Кутта усылын өзгертип, басқаша көринисте усынды. Бул усыл анықлыққа ерисиў ушын h адымды автоматикалық түрде хәм тезлик пенен сайлаў усылын береді [2]. Бул формула төмендегиден ибарат:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot [k_1^{(i)} + 4k_4^{(i)} + k_5^{(i)}], \quad (8)$$

бул жерде,

$$\begin{cases} k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i), & k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{3}\right), \\ k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{6} + \frac{k_2^{(i)}}{6}\right), \\ k_4^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{8} + \frac{3}{8}k_3^{(i)}\right), \\ k_5^{(i)} = hf\left(x_i + h, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2} - \frac{3}{2}k_3^{(i)} + 2k_4^{(i)}\right). \end{cases}$$

Бул усылдың жетискенлиги соннан ибарат, h тың жоқары дәрежелерин өз ишине алған қатардың ағзала-рын таслап жиберіў есабынан пайда болған $\mathcal{E}$ кәтелик

$$5\mathcal{E} = k_1^{(i)} - \frac{9}{2}k_3^{(i)} + 4k_4^{(i)} - \frac{1}{2}k_5^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

формула менен анықланады. Сондай-ақ, h адымды өзгертиў қағыйдасы төмендегише: егер (9) аңлатпаның муғдары берилген $\mathcal{E}$ кәтеликке салыстырғанда 5 еседен көп болса, онда адымды еки есе киши етип алып, есаплаўларды қайтадан орынлаў керек; егер оң тәреп берилген $\mathcal{E}$ дәлликтен $\frac{5}{32}$ есе киши болса, онда h

адымды еки есе арттырып, есаплаўды тәкирарлаў керек. Мерсонның тастыйықлаўына қарағанда, бул усыл турақлы h адым менен алынған стандарт Рунге-Кутта усылына салыстырғанда есаплаўларды 20 % ке кемейтеди [2].

Мысал. Жоқарыдағы усыллардан пайдаланып, берилген Коши мәселесиниң $[0, 1]$ кесиндисинде шешимлериниң кестесин жасаң:

$$y'(x) = -y(x) \cos x + \sin x \cdot \cos x, \quad x \in [0, 1]$$

$$y(0) = 1,$$

Мәселениң дәл аналитикалық шешими

$$y^*(x) = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1 \text{ көриниске ийе.}$$

Шешилиўи.

Бул жерде

$h=0,2$; $f(x, y) = -y \cos x + \sin x \cdot \cos x$ деп алынады. Дәслеп

$x_{i+1} = x_0 + ih, i = 0, n-1$ ноқатлары жасалады. Бул ноқатларға сәйкес шешимлердиң мәнислери жоқарыда атап өтилген Эйлер усылы, Эйлер-Коши усылы, Рунге-Кутта усылы хәм Кутта-Мерсон усылларына тийкарланып табылады. C++ программаластырыў тилинде дүзилген программалардан пайдаланып табылған есаплаў нәтийжелери 1,2-кестелерде келтирилген.

1-кесте

$x_i, i = \overline{0,5}$	$y^*(x_i)$	y_i (Эйлер усылы)	y_i (Эйлер-Коши усылы)	y_i (Рунге-Кутта усылы)	y_i (Кутта-Мерсон усылы)
0	1	1	1	1	1
0,2	0,8383112	0,8	0,8410656	0,8383146	0,8383104
0,4	0,7443200	0,6821312	0,7481049	0,7443248	0,7443196
0,6	0,7017692	0,6282099	0,7053792	0,7017745	0,7017699
0,8	0,6934379	0,6177170	0,6962166	0,6934434	0,6934395
1	0,7036229	0,6316009	0,7053784	0,7036292	0,7036251

Төмендеги кестеде хәр бир усыл арқалы алынған шешим менен мәселениң дәл шешими арасындағы айырма, яғный дәллик дәрежеси келтирилген.

2-кесте

$x_i, i = \overline{0,5}$	$y^*(x_i)$	$ y_i - y^* $ (Эйлер усылы)	$ y_i - y^* $ (Эйлер-Коши усылы)	$ y_i - y^* $ (Рунге-Кутта усылы)	$ y_i - y^* $ (Кутта-Мерсон усылы)
0	1	0	0	0	0
0,2	0,8383112	0,0383112	0,0027544	0,0000034	0,0000009
0,4	0,7443200	0,0621888	0,0037849	0,0000048	0,0000003
0,6	0,7017692	0,0735593	0,0036099	0,0000052	0,0000007
0,8	0,6934379	0,0757209	0,0027788	0,0000056	0,0000016
1	0,7036229	0,0720220	0,0017555	0,0000063	0,0000023

Бул кестелерден көринип турғанындай, 4-тәртіпті Рунге-Кутта усылы хәм 5-тәртіпті Кутта-Мерсон усылы аналитикалық шешимге жақын болған нәтийжелерди береді екен. Сондай-ақ, h адымды кемейтйү арқалы Эйлер усылы хәм Эйлер-Коши усылларының да дәллігін арттырыў мүмкін.

Әдебиятлар

1. Бахвалов Н., Жидков И., Кобельков Г. Численные методы. – М.: ФизМатЛит, 2002.
2. Исроилов М. Хисоблаш методлари, 2-қисм. – Т.: Iqisod-Moliya, 2008.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: ФизМатЛит, 2000.
4. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: «Высшая школа», 2008.
5. Формалев В.Ф. Численные методы: учебник. – М.: ФизМатЛит, 2004.

РЕЗЮМЕ

Мазкур мақолада оддий дифференциал тенгламалар учун Коши масаласини ечишнинг бир кадамлы сонли усуллари кўриб чиқилган. Берилган сонли усулларнинг самарадорлигининг қиёсий таҳлили биринчи тартибли оддий дифференциал тенглама учун қўйилган Коши масаласини ечиш мисолида амалга оширилган.

РЕЗЮМЕ

В статье рассмотрены одношаговые численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Сравнительный анализ эффективности данных численных методов реализованы на примере решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

SUMMARY

This article discusses one-step numerical methods for solving the Cauchy task for ordinary differential equations. A comparative analysis of the effectiveness of these numerical methods is implemented by using the example of solving the Cauchy task for an ordinary differential equation of the first order.

УДК 621.315.593

КРЕМНИЙ С НАНОКЛАСТЕРАМИ АТОМОВ МАРГАНЦА – НОВЫЙ МАТЕРИАЛ ДЛЯ ТЕНЗОДАТЧИКОВ

Х.М.Иллев - доктор физико-математических наук, профессор

Ташкентский государственный технический университет имени Ислама Каримова

А.Б.Камалов - доктор физико-математических наук, доцент

С.А.Турсынбаев – докторант

Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза

Таянч сўзлар: кремний, марганец, тензосохсалар, нанокластер, босим, харорат, ёритилганлик.

Ключевые слова: кремний, марганец, тензосохсалар, нанокластер, давление, температура, освещённость.

Key words: silicon, manganese, tensorial properties, nanocluster, pressure, temperature, illumination.

Введение: Тензоэлектрические свойства полупроводников, легированных различными примесными атомами, были достаточно хорошо изучены в работах [1-2]. Однако влияние давления на параметры тензоэлектрических свойств кремния с нанокластерами примесных атомов марганца при различных температурах ещё практически не изучено. Такие исследования представляют большой практический интерес для определения влияния давления на состояние и стабильность кластеров примесных атомов марганца, что позволяет создать на основе примесных атомов кластеров марганца более чувствительные датчики. Примеси с нанокластерами марганца обладают рядом уникальных физических свойств, которыми не обладает исходный материал без марганца [3-4]. В данной работе приведены экспериментальные результаты исследования давления на электрические свойства кремния с нанокластерами атомов марганца.

До сегодняшнего дня разработаны и созданы различные тензодатчики с широкими функциональными возможностями и можно сказать, что при этом разработчиками были использованы все возможные характеристики полупроводниковых материалов, легированных различными примесными атомами. Для создания более эффективных, высокочувствительных и быстродействующих тензодатчиков необходимы новые полупроводниковые материалы или новые физические явления. В этом числе представляет большой научный и практический интерес влияние давления и температуры на изменение параметров полупроводникового материала, то есть на его проводимость [5-6].

Метод исследования: В качестве исходного материала был выбран кремний р типа проводимости с удельным сопротивлением $\rho=3 \text{ Ом}\cdot\text{см}$, с концентрацией

кислорода ($N_{O_2}=4\cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$). Диффузия проводилась в запаянных ампулах в интервале температур $T=1150\div 1170 \text{ }^\circ\text{C}$ в течении времени $t=5\div 20$ минут. После диффузии пластины резко охлаждались в масле со скоростью $220 \text{ }^\circ\text{C}/\text{с}$. Далее пластины очищались механической и химической обработкой в HCl и HF [7].

Для исследования влияния давления на параметры полученных образцов была создана специальная установка, позволяющая осуществлять давление в локальной области образца для изучения его электрофизических свойств при различных температурах. Прибор позволяет получить результаты в области температур от комнатной до $150 \text{ }^\circ\text{C}$. Давление создается механическим способом металлическим острым зондом.

Экспериментальные результаты. Было изучено влияние давления от $5,16\cdot 10^5 \text{ Па}$ до $7,74\cdot 10^7 \text{ Па}$ при $30 \text{ }^\circ\text{C}$, $40 \text{ }^\circ\text{C}$, $50 \text{ }^\circ\text{C}$, $70 \text{ }^\circ\text{C}$. Во время измерения, падение напряжения на образцах было $E=10 \text{ В}$.

Таблица 1

Без освещения				
	30 °C	40 °C	50 °C	70 °C
P, [Па]	I/I ₀	I/I ₀	I/I ₀	I/I ₀
$5,16\cdot 10^5$	1	1	1	1
$1,29\cdot 10^7$	3,16	4,06	6,56	8
$2,58\cdot 10^7$	3,44	4,8	8,33	10,16
$3,87\cdot 10^7$	3,55	5,14	9,21	11,33
$5,16\cdot 10^7$	3,62	5,39	9,83	12,62
$6,45\cdot 10^7$	3,7	5,59	10,53	13,7
$7,74\cdot 10^7$	3,75	5,75	11,13	14,62

В таблице 1 приведено относительное изменение тока в зависимости от приложенного значения давления при различных температурах, при отсутствии освещения. Как видно в отличие от обычного кремния и от